15. LA PROPORCIÓN ÁUREA.

15.1. La Geometría.

Su nombre tiene algo de mítico porque suena mucho más de lo que realmente se le conoce. Se le llama también divina proporción, número de oro, regla dorada, etc. Su construcción y uso no es nada complicado, lo que pasa es que es mucho más inmediato hacer una proporción estática, basada en la igualdad, como dividir algo por un número entero, lo mismo que establecer un ritmo de crecimiento a partir de por ejemplo la duplicación: 1, 2, 4, 8, 16... En el mundo de la informática es lo usual, y cuando nos condicionan factores materiales, espaciales, físicos, la cuadrícula es la forma más cómoda de adaptarse a estos condicionantes. Sin embargo en la naturaleza se manifiestan otras organizaciones formales y principios proporcionales mucho más interesantes como modelo para el trabajo creativo.

La proporción áurea está formulada ya en los *Elementos de Euclides* (s.-III), en una construcción geométrica denominada *División de un segmento en media y extrema razón*. La idea es tan simple como perfecta: El todo se divide en dos partes tal que, la razón proporcional entre la parte menor y la mayor, es igual a la existente entre la mayor y el total, es decir, la suma de ambas.

15.2. La proporción áurea.

Cuando en una tercera proporcional el término mayor es igual a la suma de los otros dos se verifica que:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$\Phi = 1,618033... = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$ ***es el número de oro***.

Cuando un rectángulo tiene los lados con esta proporción recibe el nombre de **rectángulo de oro**. En el capítulo dedicado a las relaciones del arte con la geometría veremos la importancia de Φ en el estudio de las proporciones armónicas. Más adelante estudiaremos las espirales relacionadas con el rectángulo de oro.

También es fundamental para la construcción del pentágono regular, pues la proporción áurea se cumple entre su diagonal y su lado:

$$\frac{d}{l} = \Phi$$

Vamos a comprobar que

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

Operamos:

$$(a+b)\cdot b = a^2$$
$$ab + b^2 = a^2$$
$$a^2 - ab - b^2 = 0$$

Resulta una ecuación de segundo grado donde la incógnita es a. Vamos a despejarla. Nos interesa sólo la raíz positiva:

$$a = \frac{b + \sqrt{(b^2 + 4b^2)}}{2} = b\frac{(1+\sqrt{5})}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Vamos a construir segmentaciones áureas a partir de diferentes datos:

15.2.1. Cuando el dato es a.

Dibujamos un cuadrado de lado **a** y la mediatriz de dicho lado. Con centro en **N**, punto medio de **a**, y radio **NM**, diagonal de medio cuadrado, trazamos un arco que corta en **P** a la prolongación de **a**, definiendo el segmento **b**. Se cumple que $\frac{a}{b} = \Phi$

Vamos a comprobarlo:

Como $MN = NP$, pues son radios de la misma circunferencia, resulta que:

Consideramos el triángulo **MNQ**, por Pitágoras:

$$MN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

En nuestro dibujo:

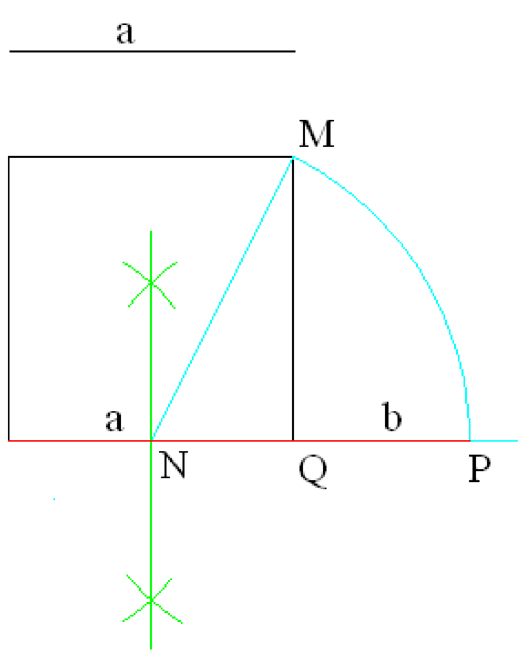
$$NP = \frac{a}{2} + b$$

Lo aplicamos en la igualdad anterior:

$$\frac{a}{2} + b = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$b = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$ luego: $$a = \frac{2b}{\sqrt{5}-1}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \Phi$$



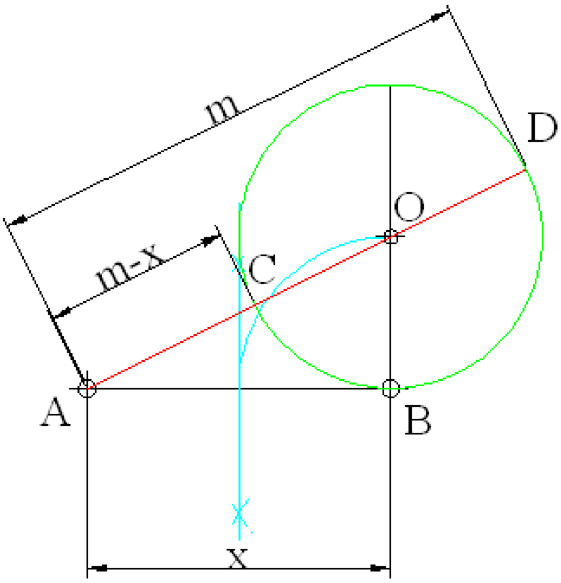
1.- Dibujamos un cuadrado de lado **a**

2.- La mediatriz de dicho lado.

3.- Con centro en **N**, punto medio de **a**, y radio **NM**, diagonal de medio cuadrado, trazamos un arco que corta en **P** a la prolongación de **a**

4.- Definiendo el segmento **b**.

15.2.2. Ejercicio: Dado un segmento AB = 40 mm, que es el segmento áureo de otro .Hallar este.



1-. Por el extremo B trazamos una perpendicular al segmento AB.

2.- Determinamos la mediatriz de AB.

3.- Haciendo centro en B llevamos a/2 sobre la perpendicular punto O.

4.- Con centro en O y radio OB = a/2 trazamos una circunferencia.

5.- Unimos O con A y lo prolongamos hasta que corte a la circunferencia en el punto D. El segmento AD es el segmento buscado.

15.3. Cuando el dato es a+b.

Ésta es otra construcción de la segmentación áurea. Sea **MN= a+b**. Trazamos un segmento perpendicular de magnitud **MN/2** y dibujamos el triángulo rectángulo **MNP**. Con centro en **P** y radio **PN** trazamos un arco que corta a la hipotenusa en el punto **Q**. Con centro en A trazamos un arco de radio **AQ** que corta a **MN** en el punto **R**, definiendo los segmentos **a** y **b**.

Se verifica que: $\frac{a}{b} = \Phi$

Vamos a comprobarlo:

$MP = a + \frac{a+b}{2}$, ya que

$MQ = a$ y $PQ = \frac{a+b}{2}$

Considerando el triángulo **MNP**, por Pitágoras:

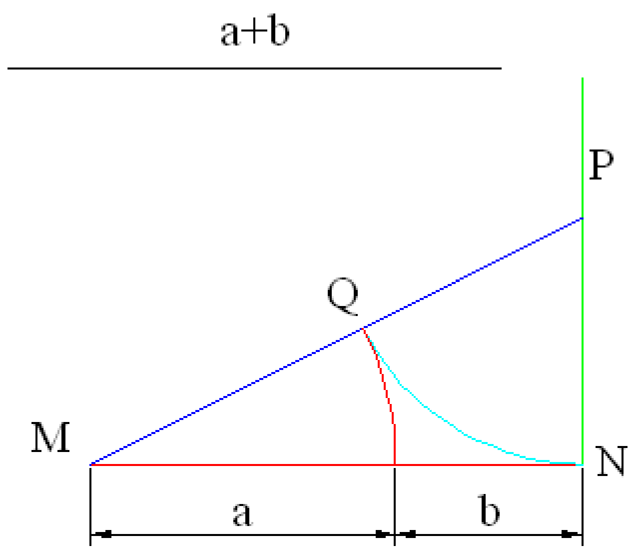
$MP^2 = (a+b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{5(a+b)^2}{4}$, luego:

$$MP = \frac{(a+b)\sqrt{5}}{2}$$

$$MP = a + \frac{a+b}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{5}}{2}$$

$$a = (a+b)\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{(a+b)}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{4} = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = \Phi$$



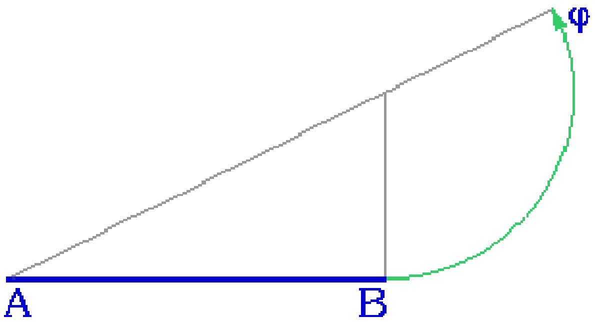
Sea MN= a+b.

1.- Trazamos un segmento perpendicular de magnitud MN/2

2.- Dibujamos el triángulo rectángulo MNP.

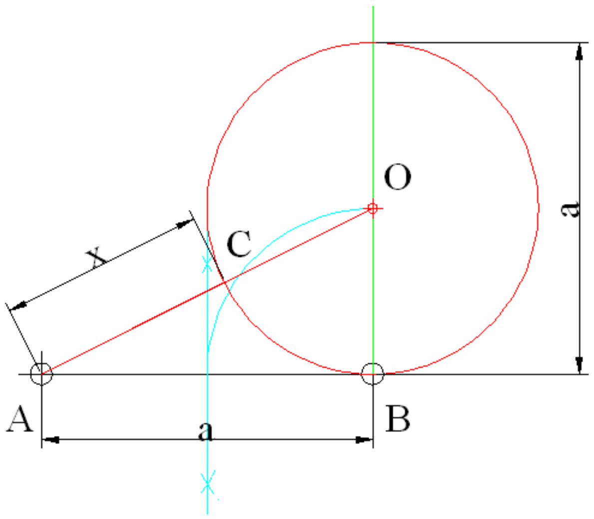
3.- Con centro en P y radio PN trazamos un arco que corta a la hipotenusa en el punto Q.

4.- Con centro en M trazamos un arco de radio MQ que corta a MN en el punto R, definiendo los segmentos a y b.



Igual de simple es hacer la operación inversa, es decir, averiguar de qué medida es sección áurea el segmento AB. Formamos el mismo triángulo que antes, pero en lugar de restar a la hipotenusa el cateto menor, se le suma. AB es sección áurea de AΦ, y este segmento es la suma de AB y su sección áurea hallada en el esquema anterior, por supuesto.

15.3.1. Ejercicio: Dado un segmento AB de 50mm, se pide construir gráficamente el segmento áureo del mismo.



1-. Por el extremo B trazamos una perpendicular al segmento AB.

2.- Determinamos la mediatriz de AB.

3.- Haciendo centro en B llevamos a/2 sobre la perpendicular punto O.

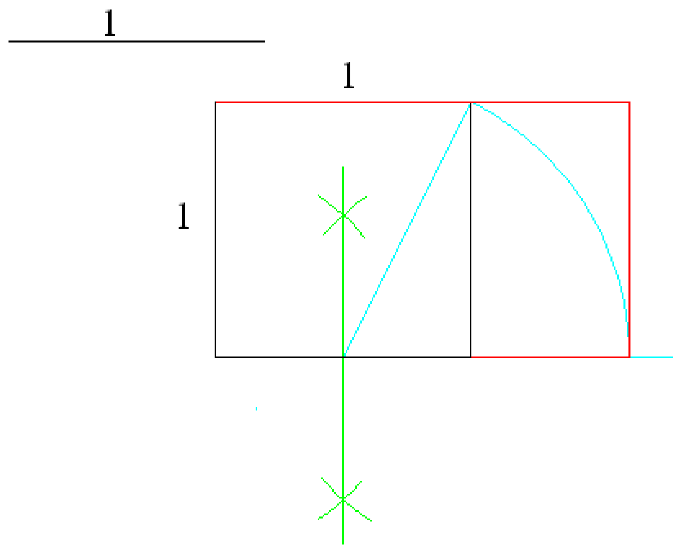
4.- Con centro en O y radio OB = a/2 trazamos una circunferencia.

5.- Unimos O con A y el segmento AC es el segmento áureo del dado.

15.4. Los rectángulos de oro.

Si el dato es el lado menor **a** usamos la primera construcción de segmentación áurea.

Un rectángulo áureo es aquel en que sus lados están en razón áurea.

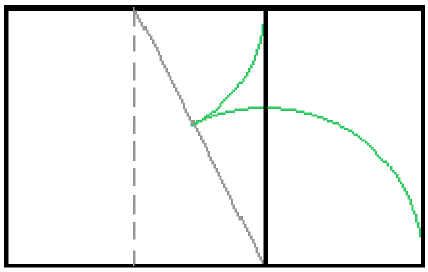


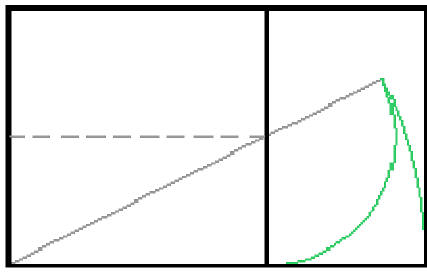
1.- Se puede construir rápidamente a partir de un cuadrado

2.- Cogemos el punto medio de la base, tomamos con un compás la distancia hasta uno de los vértices superiores y con un arco llevamos esta medida a la prolongación de la base.

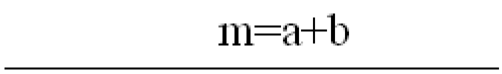
3.- El rectángulo ampliado es áureo, como también la ampliación, si suprimimos el cuadrado inicial, tiene esta misma proporción:

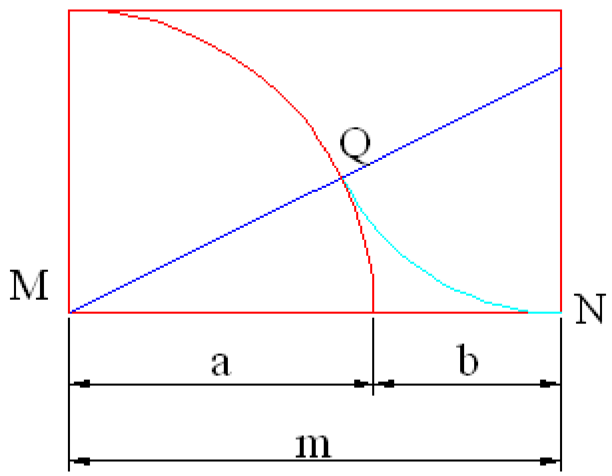
A veces vemos estas otras construcciones, pero hacen lo mismo que la anterior, definir un triángulo rectángulo con un lado y la mitad de otro, restar la mitad a la hipotenusa y aplicar la diferencia como ampliación del cuadrado:



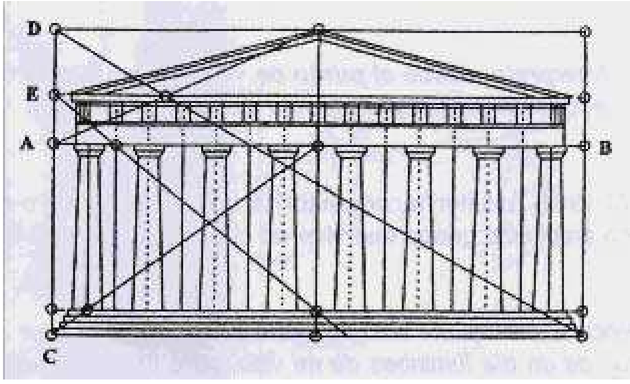


Si el dato es el lado mayor, **a+b**, utilizamos la segunda.



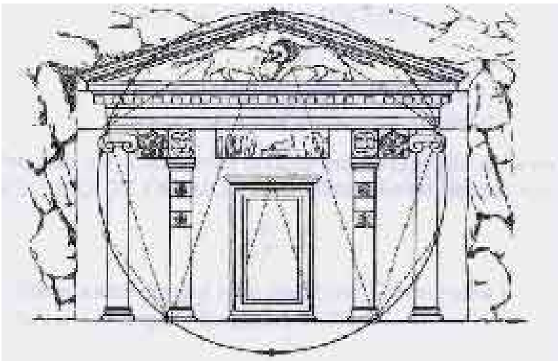


15.5. Curiosidades



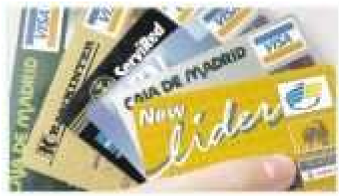
En la figura se puede comprobar que AB/CD=ϕ. Hay más cocientes entre sus medidas que dan el número áureo, por ejemplo: AC/AD=ϕ y CD/CA=ϕ.

Hay un precedente a la cultura griega donde también apareció el número de oro. En **La Gran Pirámide de Keops**, el cociente entre la altura de uno de los tres triángulos que forman la pirámide y el lado es 2ϕ.

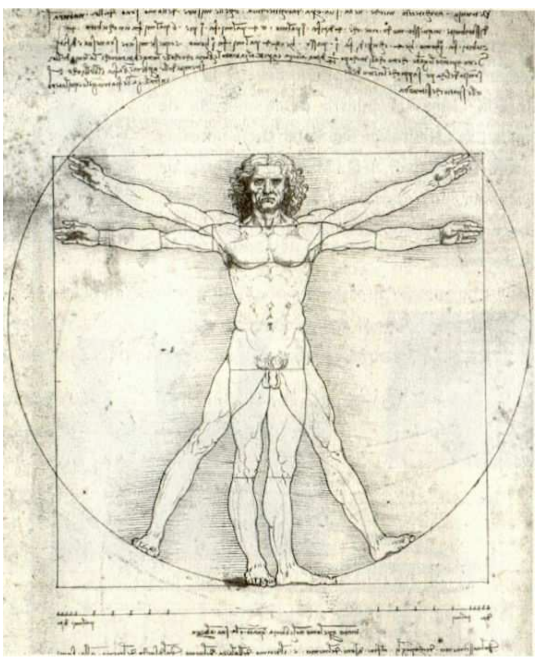


Ya vimos que el cociente entre la diagonal de un pentágono regular y el lado de dicho pentágono es el número áureo. En un pentágono regular está basada la construcción de la **Tumba Rupestre de Mira** en Asia Menor.

Ejemplos de rectángulos áureos los podemos encontrar en las tarjetas de crédito, en nuestro carnet de identidad y también en las cajetillas de tabaco.



Unas proporciones armoniosas para el cuerpo, que estudiaron antes los griegos y romanos, las plasmó en este dibujo **Leonardo da Vinci**. Sirvió para ilustrar el libro *La Divina Proporción* de **Luca Pacioli** editado en 1509.



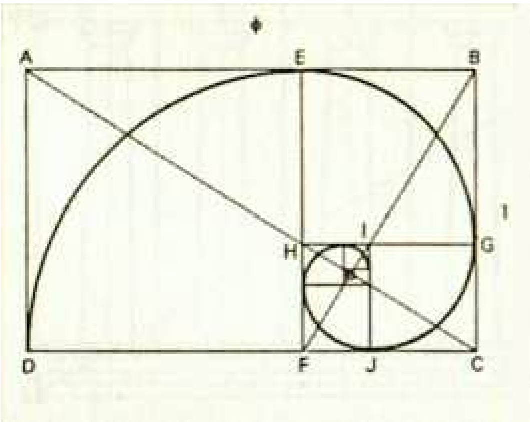
En dicho libro se describen cuales han de ser las proporciones de las construcciones artísticas. En particular, **Pacioli** propone un hombre perfecto en el que las relaciones entre las distintas partes de su cuerpo sean proporciones áureas. Estirando manos y pies y haciendo centro en el ombligo se dibuja la circunferencia. El cuadrado tiene por lado la altura del cuerpo que coincide, en un cuerpo armonioso, con la longitud entre los extremos de los dedos de ambas manos cuando los brazos están extendidos y formando un ángulo de 90º con el tronco. Resulta que el cociente entre la altura del hombre (lado del cuadrado) y la distancia del ombligo a la punta de la mano (radio de la circunferencia) es el número áureo.

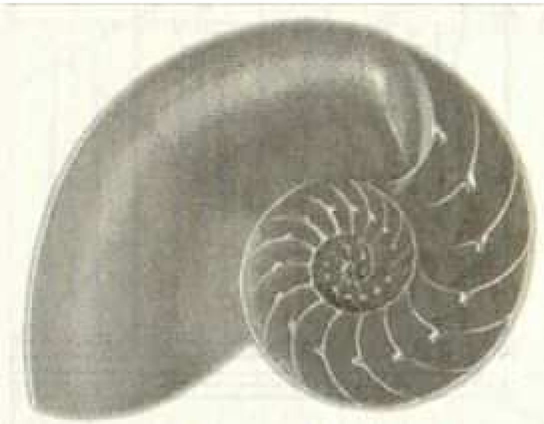
El cuadro de Dalí *Leda atómica*, pintado en 1949, sintetiza siglos de tradición matemática y simbólica, especialmente pitagórica. Se trata de una filigrana basada en la proporción áurea, pero elaborada de tal forma que no es evidente para el espectador. En el boceto de 1947 se advierte la meticulosidad del análisis geométrico realizado por Dalí basado en el pentagrama místico pitagórico.

En la naturaleza, aparece la proporción áurea también en el crecimiento de las plantas, las piñas, la distribución de las hojas en un tallo, dimensiones de insectos y pájaros y la formación de caracolas.

15.5.1. La espiral logarítmica

Si tomamos un rectángulo áureo ABCD y le sustraemos el cuadrado AEFD cuyo lado es el lado menor AD del rectángulo, resulta que el rectángulo EBCF es áureo. Si después a éste le quitamos el cuadrado EBGH, el rectángulo resultante HGCF también es áureo. Este proceso se puede reproducir indefinidamente, obteniéndose una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una sucesión de rectángulos áureos encajados que convergen hacia el vértice O de una espiral logarítmica.



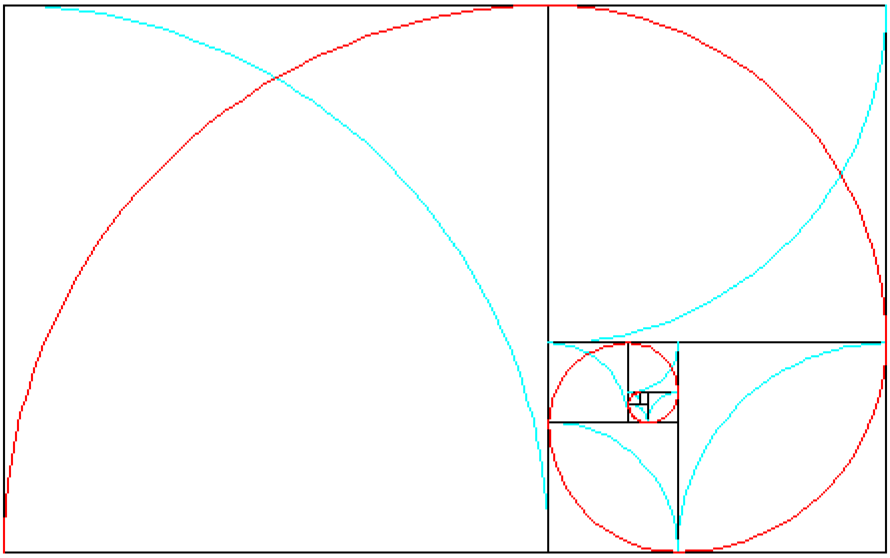


Esta curva ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama también espiral equiangular (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante) o espiral geométrica (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética). J. Bernoulli, fascinado por sus encantos, la llamó *spira mirabilis*, rogando que fuera grabada en su tumba.

La espiral logarítmica vinculada a los rectángulos áureos gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. El ejemplo más visualmente representativo es la concha del *nautilus*.

14.1.1.1. *La (pseudo)espiral logarítmica*.

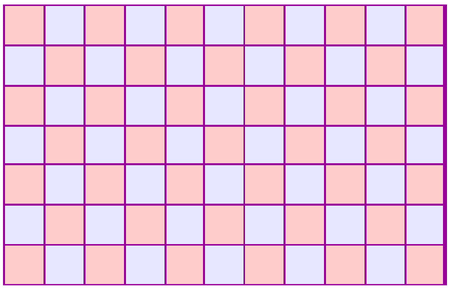
Del gráfico anterior, deducimos que a cualquier rectángulo áureo se le puede restar por su lado menor o bien añadir por su lado mayor un cuadrado, y el resultado sigue siendo un rectángulo áureo. En gnomónica diríamos que el cuadrado es el gnomon del rectángulo áureo (traduzco: gnomon es aquella figura que añadida a otra le proporciona más superficie sin cambiar la forma). Esta propiedad se ilustra frecuentemente con esta espiral logarítmica:

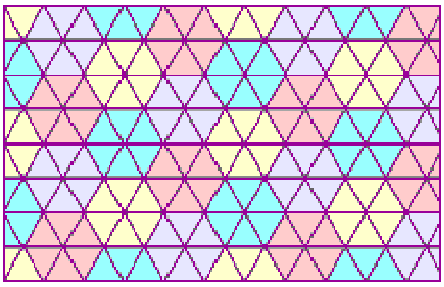


Lo de espiral logarítmica hay que matizarlo, es una pseudo-espiral porque se forma con arcos de 90º de circunferencia inscritos en cada cuadrado y enlazados entre sí, mientras que en una verdadera espiral hay un cambio de curvatura constante, no cambios puntuales. Pero crece en proporción geométrica, por eso lo de logarítmica.

15.6. Su relación con el pentágono y dodecágono regulares.

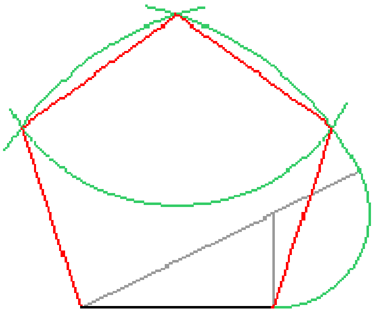
Comenté en algún articulillo anterior que hay tres grandes familias geométricas, regidas por tres raíces: R2, R3 y R5. La R2 regula la estructura del cuadrado, la duplicación. R3 rige las propiedades del triángulo equilátero y el hexágono. En base a cualquiera de las dos podemos organizar en red todo el plano, resolviendo lo que comentaba antes, de "acatar" las limitaciones físicas

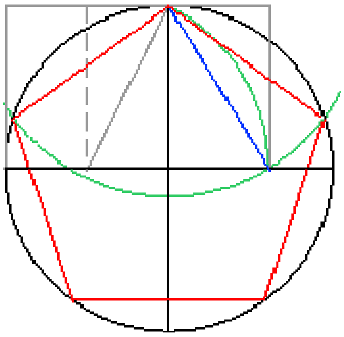




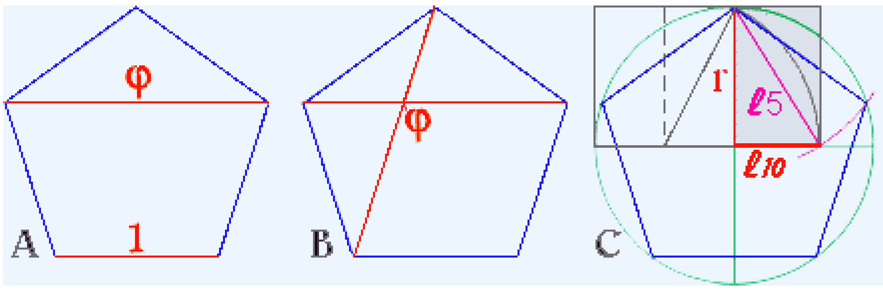
La tercera familia, de Raíz de 5, la proporción áurea y el pentágono, no ofrece utilidades inmediatas, con élla es imposible generar estructuras isótropas que cubran todo el espacio. No se accede a sus propiedades por simple deducción visual, sino a costa de una observación activa, intencionada. Desde la admiración de los pitagóricos por el pentágono estrellado hasta la construcción de cúpulas geodésicas derivadas del icosaedro, siempre ha tenido ese carácter oculto, contemplativo, abstracto, tan atractivo para los amantes de la geometría y las matemáticas.

Sin embargo, es un sistema muy compacto; allí donde aparece está en todas partes. Para construir el pentágono regular, bien a partir del lado base, bien circunscrito en una circunferencia, siempre tenemos que recurrir a la proporción áurea: se ve claramente que las operaciones son las mismas que vimos antes:





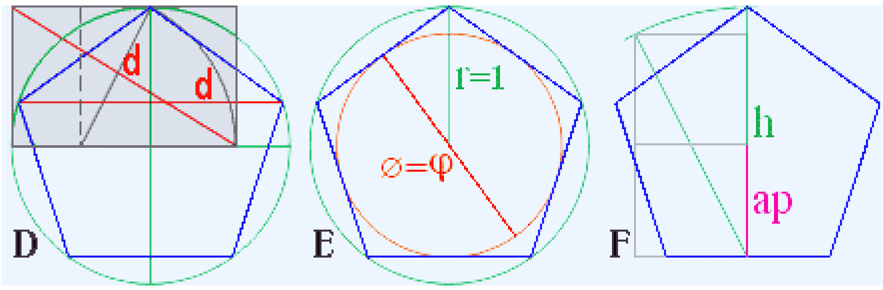
Esto es porque todos los elementos están relacionados entre sí por esta proporción:



El lado es sección áurea de la diagonal.

Cada diagonal divide a otras dos según la sección áurea.

Si hacemos un rectángulo áureo con el radio r como lado mayor, la diagonal es igual al lado del pentágono, y el lado menor igual al lado del decágono.



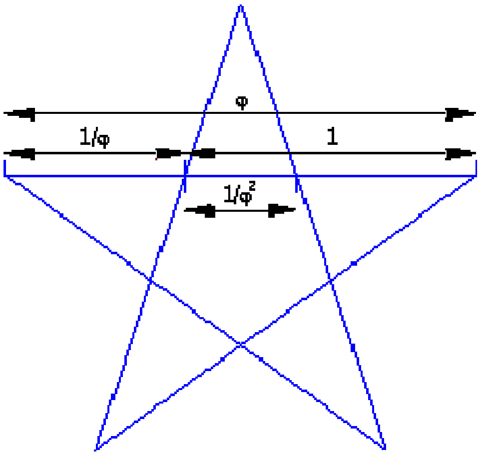
Si hacemos un rectángulo áureo con el radio r como lado menor, la diagonal mide igual que la diagonal del pentágono.

El radio es sección áurea del diámetro de la circunferencia inscrita, que es el doble de la apotema.

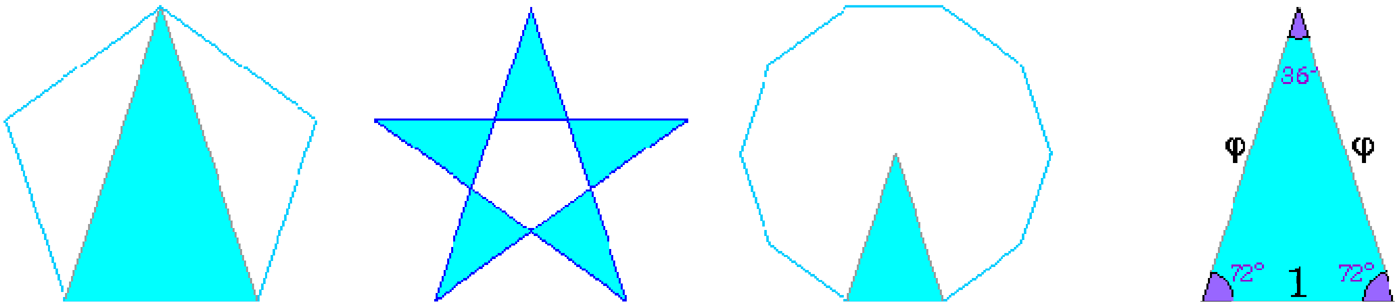
La altura h del pentágono mide R5 en relación a la apotema.

15.6.1. El Pentagrama pitagórico.

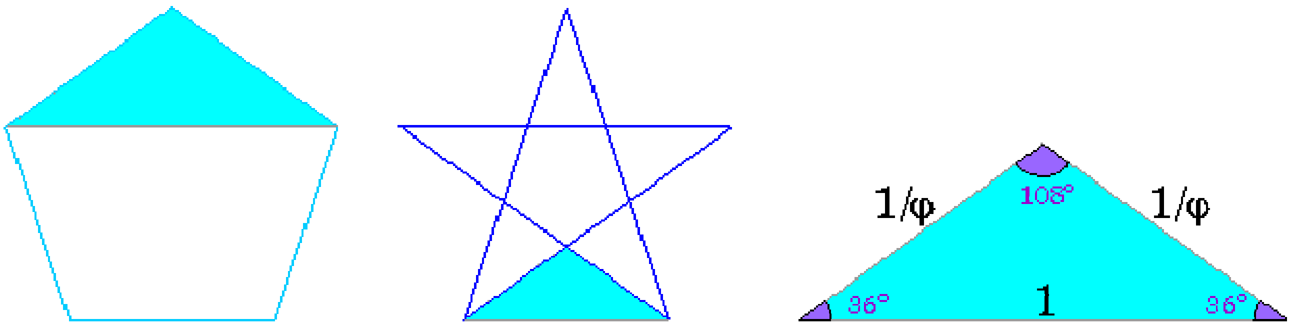
Los pitagóricos adoptaron como símbolo el Pentágono regular estrellado. Se le llamó también Pentagrama y Pentalfa (cinco puntas en forma de alfa). Aparte de la simbología de su número, su propiedad geométrica es que todos los segmentos están en progresión áurea.



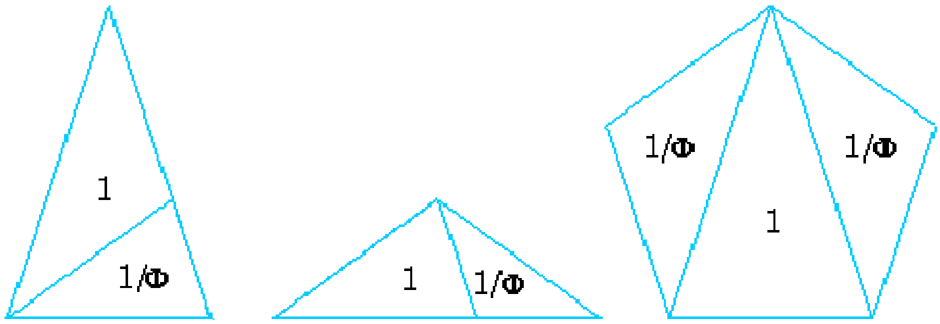
El triángulo del pentalfa, también llamado Triángulo Sublime y Triángulo áureo mayor, tiene sus lados en proporción áurea, y sus ángulos en razón simple 1:2:2. Aparece en diversas formas en el pentágono y el decágono:



Su complementario, el Triángulo Divino o Triángulo áureo menor, también es isósceles, también tiene sus lados en proporción áurea, y sus ángulos en razón simple 3:1:1. Aparece en el Pentágono:



De hecho, si dividimos un pentágono usando vértices y cruces de diagonales siempre lo descompondremos en varios triángulos de ambos tipos. Si partimos uno de estos triángulos desde un vértice a la sección áurea del lado contrario, la división dará un triángulo de cada tipo. A la inversa, adosando a uno de éllos el contrario, se puede agrandar la superficie del primero. Por lo tanto, cada uno es gnomon del otro.



Las superficies de los triángulos así divididos guardan la proporción áurea. El área del Pentágono regular, como vemos en la última figura, es R5 veces el del triángulo central. La proporción se manifiesta en todas partes, como un sistema perfectamente coherente.